

Kollisionsverlust bei zeitgerastertem Vielfachzugriff

von Rudolf Nocker *

In Zeitmultiplex-Vielfachzugriff-(TDMA-)Durchschalte-Vermittlungsnetzen mit verteilter Steuerung können Kollisionen von Zugriffsvorgängen auftreten. Es wird unterstellt, daß die den kollidierenden Zugriffsvorgängen zugehörigen Verbindungswünsche nicht weiterbehandelt werden und deshalb wegen Kollision zu Verlust gehen. Die zugehörige Verlustwahrscheinlichkeit – genannt Kollisionsverlust BK – wird allgemein berechnet. Die numerische Auswertung zeigt, daß für Fernspreverkehr diese – gegenüber Systemen mit konzentrierter Steuerung – zusätzlichen Kollisionsverluste vernachlässigt werden können gegenüber den üblichen Planungsverlusten wegen Abnehmermangels.

Collision Congestion on Clocked Multiple Access

In TDMA switching networks with distributed control operating in circuit switching mode collisions can occur on multiple access to communication channels. Assuming corresponding calls are not treated further they are going to loss due to collision. An analytical calculation is carried out for the collision congestion (e.g. the probability of loss of calls due to collision). Numerical calculation shows that for telephone traffic collision congestion can be neglected (having in mind, that the latter can only occur in systems with distributed control) in comparison to planning congestion due to the limited number of communication channels.

1. Einleitung

Bild 1 zeigt das vereinfachte Blockschaltbild eines Zeitmultiplex-Vielfachzugriff-(TDMA-)Durchschalte-Vermittlungsnetzes mit verteilter Steuerung und leitungsgebundener Signalübertragung [1] – [4].

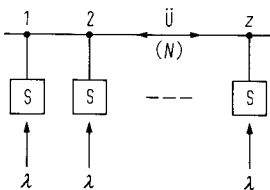


Bild 1. Blockschaltbild eines TDMA-Durchschalte-Vermittlungsnetzes mit leitungsgebundener Signalübertragung; S Station, Ü Zeitmultiplex-Übertragungssystem, N Zeitkanalanzahl, z Stationsanzahl, λ Rufeinfallrate.

Wenn die einzelnen Stationen unkoordiniert (also ohne übergeordnete Steuerung und somit unabhängig voneinander) auf die freien Zeitkanäle des Zeitmultiplex-Übertragungssystems zugreifen, dann können „Kollisionen“ von Zugriffsvorgängen auftreten. Die einfachste Reaktion auf solche Kollisionen ist, nach Erkennung einer Kollision den Zugriffsvorgang abubrechen und den zugehörigen Verbindungswunsch nicht mehr weiter zu behandeln. Die den kollidierenden Zugriffsvorgängen zugehörigen Verbindungswünsche gehen bei diesem Vorgehen wegen Kollision zu Verlust. Die entsprechende Verlustwahrscheinlichkeit (genannt Kollisionsverlust BK) wird hier für den Fall des zeitgerasterten (getakteten) Vielfachzugriffs aus z unabhängig vonein-

ander arbeitenden Stationen auf zufällig ausgewählte freie Zeitkanäle von insgesamt N vorhandenen durch Nutzbelegungen (welche sich an erfolgreiche Zugriffsvorgänge unmittelbar anschließen) belastete Zeitkanäle allgemein berechnet. Die Auswertung zeigt, in welchen Fällen die bei solchen TDMA-Durchschalte-Vermittlungsnetzen gegenüber den üblichen Planungsverlusten wegen Abnehmermangels zusätzlich auftretenden Kollisionsverluste berücksichtigt werden müssen bzw. vernachlässigt werden können. Ergebnisse aus [4], Abschnitt 5, werden damit in gekürzter Fassung dargestellt. Nachfolgend werden allgemeiner die Stationen als Zugriffspunkte, die Zeitkanäle als Abnehmer bezeichnet.

2. Zeitliche Rasterung

In Zeitmultiplexsystemen können sich die Belegzustände von Abnehmern nur zu diskreten, äquidistanten Zeitpunkten (nachfolgend Zeitrasterpunkte genannt) ändern. Die zugehörige Zeitrasterperiode T_z ist (beispielsweise durch Überraumenbildung) nur als ganzzahliges Vielfaches der Zeitraumenperiode des Zeitmultiplexsystems realisierbar. Nachfolgend wird angenommen, daß Zugriffsvorgänge nur im ersten Zeitraumen jeder Zeitrasterperiode erlaubt sind und nur auf Abnehmer gerichtet werden dürfen, die im letzten Zeitraumen der unmittelbar vorhergehenden Zeitrasterperiode noch unbelegt sind. Falls bei einem Zugriffsvorgang eine Kollision stattfindet, so kann die Freigabe des mehrfach belegten Abnehmers frühestens im zweiten Zeitraumen der jeweiligen Zeitrasterperiode erfolgen. Der benutzte Abnehmer ist daher nur dann für die folgende Zeitrasterperiode sicher als frei erkennbar, wenn diese zwei oder mehr Zeitraumen umfaßt. Die nachfolgenden Berechnungen gelten jedoch mit vernachlässigbarer Ungenauigkeit auch

* Prof. Dr.-Ing. R. Nocker, Fachbereich Elektrotechnik, Fachhochschule Hannover, Ricklinger Stadtweg 120, D-3000 Hannover 91.

dann, wenn als Zeitrasterperiode die einfache Zeitrasterdauer vorgegeben wird.

Die beschriebene zeitliche Rasterung ist nur für „kurz“ andauernde Vorgänge bedeutsam, beispielsweise die Zugriffsvorgänge. Für „lang“ andauernde Vorgänge, beispielsweise Nutzbelegungen, ist die zeitliche Rasterung vernachlässigbar.

3. Voraussetzungen

- (V1) Es gibt genau z unabhängig voneinander arbeitende Zugriffspunkte.
- (V2) Es gibt genau N Abnehmer.
- (V3) In jedem Zugriffspunkt trifft ein Poisson-scher Forderungsstrom mit der Intensität λ ein.
- (V4) In jedem Zugriffspunkt ist ein Wartespeicher mit unendlich vielen Warteplätzen vorhanden.
- (V5) Die Abnehmer können nur zu den Zeitrasterpunkten belegt werden.
- (V6) Je Zeitrasterperiode wird in jedem Zugriffspunkt genau eine wartende Forderung abgearbeitet.
- (V7) Ist kein Abnehmer frei, so geht die bearbeitete Forderung wegen Abnehmermangel zu Verlust (Verlustwahrscheinlichkeit BA).
- (V8) Ist mindestens ein Abnehmer frei, so wird einer der freien Abnehmer gleichwahrscheinlich ausgewählt und „belegt“.
- (V9) Jede Belegung besteht (zunächst) aus einem Anteil der konstanten Dauer T_Z , dem eigentlichen Zugriffsvorgang.
- (V10) Liegt eine Kollision von Zugriffsvorgängen vor, so wird von allen beteiligten Zugriffspunkten der entsprechende Abnehmer wieder freigegeben und alle beteiligten Verbindungswünsche gehen wegen Kollision zu Verlust (Verlustwahrscheinlichkeit BK).
- (V11) Ist der Zugriffsvorgang erfolgreich (Einzelbelegung), so schließt sich unmittelbar eine negativ exponentiell verteilte Nutzbelegungs-dauer an, deren mittlere Dauer T_N sehr groß gegenüber der Zeitrasterperiode T_Z ist.
- (V12) Abgewiesene Verbindungswünsche verschwinden ohne Rückwirkung aus dem System.

Die Abfertigungsstrategie für die Abarbeitung wartender Forderungen ist für die nachfolgenden Berechnungen unerheblich. Es kann beispielsweise Abfertigung in Ankunftsreihenfolge (FCFS: first come first served) unterstellt werden.

4. Zugriffswahrscheinlichkeit

Für die Berechnungen in diesem Abschnitt werden die Voraussetzungen V3, V4, V5, V6 und V9 (Abschnitt 3) ungeändert übernommen, die restlichen Voraussetzungen entfallen bzw. werden ersetzt durch:

- (V1) Es gibt genau einen Zugriffspunkt.
- (V2) Es gibt genau einen Abnehmer.

Die vorliegende Situation ist im Bild 2 schematisch dargestellt. Mit diesem Modell wird nachfolgend die Zugriffswahrscheinlichkeit P_Z berechnet, mit der ein „ungestörter“ Zugriffspunkt Zugriffsvorgänge ausführt.

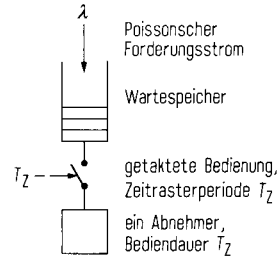


Bild 2. Modell zur Berechnung der Zugriffswahrscheinlichkeit P_Z ; λ Rufeinfallrate.

Das Angebot A_Z (an Zugriffsvorgängen je Zugriffspunkt) ist die mittlere Anzahl der während der (mittleren) Bedienzeit eintreffenden Forderungen:

$$A_Z = \lambda T_Z.$$

Die maximal mögliche Abfertigungsrate ist

$$\lambda_{\max} = 1/T_Z;$$

solange $\lambda < \lambda_{\max}$ und somit

$$A_Z = \lambda T_Z < \lambda_{\max} T_Z = 1$$

erfüllt ist, kann (da unendlich viele Warteplätze existieren) jede einfallende Forderung (wenn auch häufig etwas verzögert) abgearbeitet werden. Die Belastung y_Z des (einzigen) Abnehmers wird damit gleich dem Angebot:

$$y_Z = A_Z.$$

Andererseits ergibt sich mit der Zugriffswahrscheinlichkeit P_Z die Belastung y_Z zu

$$y_Z = 1 \cdot P_Z + 0 \cdot (1 - P_Z) = P_Z.$$

Als Zusammenhang zwischen Zugriffswahrscheinlichkeit P_Z und Angebot A_Z ergibt sich also

$$P_Z = A_Z.$$

Die Berechnung unter Berücksichtigung einer endlichen Warteplatzanzahl ist in [4], Abschnitt 5, ausgeführt. Dies wird hier nicht weiter betrachtet.

5. Kollisionsverlust beim Vielfachzugriff auf genau einen freien Abnehmer

Für die nachfolgenden Berechnungen werden die Voraussetzungen V1, V3, V4, V5, V6, V8, V9, V10 und V12 (Abschnitt 3) ungeändert übernommen, die restlichen Voraussetzungen entfallen bzw. werden ersetzt durch:

- (V2) Es gibt genau einen Abnehmer.

Die vorliegende Situation ist im Bild 3 (mit $r = 1$) schematisch dargestellt. Mit diesem Modell wird nachfolgend der Kollisionsverlust berechnet, der sich beim zeitgerasterten Vielfachzugriff aus z Zu-

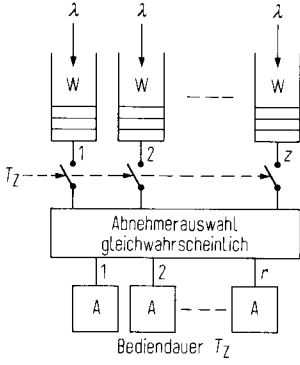


Bild 3. Schematische Darstellung des zeitgerasterten Vielfachzugriffs von z Zugriffsstellen auf jeweils einen gleichwahrscheinlich ausgewählten von r voll erreichbaren zum Zugriffszeitpunkt stets freien Abnehmern; λ Rufeinfallrate, W Wartespeicher, A Abnehmer, T_Z Bediendauer bzw. Zeitrasterperiode.

griffspunkten auf genau einen freien Abnehmer ergibt. Zu beachten ist, daß wegen Fehlens von Voraussetzung VII (Abschnitt 3) keine Nutzbelegungen auftreten. Somit ist der (einzige) Abnehmer zu Beginn jeder Zeitrasterperiode stets frei. Es können also keine Verluste wegen Abnehmermangels auftreten.

Nach Voraussetzung arbeiten die Zugriffsstellen unabhängig voneinander. Jeder Zugriffsstelle kann entweder keinen (mit Wahrscheinlichkeit $1 - A_Z$) oder genau einen Zugriff (mit Wahrscheinlichkeit A_Z) vornehmen. Es sind also die Bedingungen des Bernoullischen Versuchsschemas erfüllt, die Anzahl k der zu einem Zeitrasterpunkt ausgeführten Zugriffe ist somit binomialverteilt:

$$P_B(k) = \binom{z}{k} A_Z^k (1 - A_Z)^{z-k}, \quad k = 0, 1, \dots, z.$$

Nach Voraussetzung gehen bei $k \geq 2$ alle k Zugriffsvorgänge zu Verlust. Die Kollisionsanzahl bei k -facher Belegung des Abnehmers ist also

$$l(k) = \begin{cases} 0, & k < 2 \\ k, & k \geq 2. \end{cases}$$

Die mittlere Anzahl der Kollisionen in einer beliebigen Zeitrasterperiode ist

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \sum_{k=0}^z l(k) P_B(k) = \sum_{k=2}^z k P_B(k) = \\ &= \left[\sum_{k=0}^z k P_B(k) \right] - P_B(1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Kollisionsanzahl je Zeitrasterperiode der Mittelwert

$$\bar{l} = z A_Z [1 - (1 - A_Z)^{z-1}].$$

Die Kollisionsrate ist die mittlere Anzahl der wegen Kollision zu Verlust gehenden Zugriffsvorgänge je Zeiteinheit:

$$\lambda_K = \bar{l} / T_Z = z \lambda [1 - (1 - A_Z)^{z-1}].$$

Der Kollisionsverlust BK ist die Wahrscheinlich-

keit, daß ein beliebiger einfallender Ruf wegen Kollision zu Verlust geht. Mit der Gesamt-Rufeinfallrate $\lambda_G = z \lambda$ ergibt sich der Kollisionsverlust zu

$$BK = \frac{\lambda_K}{\lambda_G} = 1 - \left(1 - \frac{A_{ZG}}{z} \right)^{z-1}.$$

Dabei ist $A_{ZG} = z A_Z < z$ das Gesamtangebot an Zugriffsvorgängen durch alle z Zugriffsstellen.

6. Kollisionsverlust beim Vielfachzugriff auf genau r freie Abnehmer

6.1. Berechnung

Für die nachfolgenden Berechnungen werden dieselben Voraussetzungen wie im Abschnitt 5 verwendet, lediglich V2 wird ersetzt durch:

(V2) Es gibt genau r Abnehmer.

Die vorliegende Situation ist im Bild 3 schematisch dargestellt. Es können keine Verluste wegen Abnehmermangels auftreten, vgl. Abschnitt 5. Bei gleichwahrscheinlicher Abnehmerauswahl in jedem Zugriffsstelle ist auf jeden der genau r Abnehmer das Angebot A_{ZG}/r gerichtet. Mit dem Ergebnis für BK bei genau einem freien Abnehmer ergibt sich somit für jeden der r Abnehmer und somit für das Gesamtsystem die Verlustwahrscheinlichkeit zu

$$BK = 1 - \left(1 - \frac{A_{ZG}}{z r} \right)^{z-1}.$$

Eine exakte Ableitung hierfür ist in [4], Abschnitt 5, angegeben. Bei konstantem A_{ZG} und r geht dieser Ausdruck für sehr große z durch Grenzübergang gegen

$$BK_{\max} = 1 - \exp(-A_{ZG}/r).$$

6.2. Näherungsformeln

Für kleine Zahlenwerte $A_{ZG}/z r \ll 1$ folgt mit den ersten beiden Gliedern der Reihenentwicklung

$$(1 + x)^n = 1 + n x + \dots$$

aus der exakten Formel für BK die Näherungsformel

$$BK \approx 1 - \left(1 - \frac{z-1}{z} \frac{A_{ZG}}{r} \right) = \frac{z-1}{z} \frac{A_{ZG}}{r}.$$

Entsprechend folgt aus der exakten Formel für BK_{\max} für kleine Zahlenwerte $A_{ZG}/r \ll 1$ die Näherungsformel

$$BK_{\max} \approx \frac{A_{ZG}}{r}.$$

Zwischen BK und BK_{\max} besteht also der Zusammenhang

$$BK \approx \frac{z-1}{z} BK_{\max}.$$

7. Kollisionsverlust beim Vielfachzugriff auf N belastete Abnehmer

7.1. Vorbemerkung

Für die nachfolgenden Berechnungen werden sämtliche Voraussetzungen aus Abschnitt 3 verwen-

det. Mit den bisherigen Ergebnissen kann der Kollisionsverlust beim zeitgerasterten Vielfachzugriff auf freie Abnehmer eines durch Nutzbelegungen (die sich nach Voraussetzung V11 an erfolgreiche Zugriffsvorgänge unmittelbar anschließen) belasteten Abnehmerbündels berechnet werden. Falls alle Abnehmer durch Nutzbelegungen belegt sind, können nach Voraussetzung V7 Verbindungswünsche wegen Abnehmermangels zu Verlust gehen. Es gibt also zwei sich gegenseitig ausschließende Verlustursachen, nämlich entweder Kollision oder Abnehmermangel. Die zugehörigen Verlustwahrscheinlichkeiten werden nachfolgend berechnet.

7.2. Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten

Bei genau j belegten Abnehmern ($j = 0, 1, \dots, N-1$) sind $(N-j)$ Abnehmer frei. Der Kollisionsverlust bei einer gegebenen Anzahl von freien Abnehmern ist aus Abschnitt 6 bekannt. Da das Angebot A_Z an Zugriffsvorgängen sehr klein ist, können die dort angegebenen Näherungsformeln verwendet werden. Der Kollisionsverlust BK_j bei genau j belegten Abnehmern ist somit

$$BK_j = \frac{z-1}{z} \frac{A_{ZG}}{N-j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Bei genau j belegten Abnehmern ergibt sich die bedingte Kollisionsrate

$$\lambda_{K/j} = \lambda_G BK_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Die mittlere Kollisionsrate λ_K ergibt sich daraus als Erwartungswert unter Berücksichtigung aller Belegungszustände j , in denen Kollisionen auftreten können. Mit P_j als Wahrscheinlichkeit für genau j belegte Abnehmer ist

$$\lambda_K = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_{K/j} P_j = \lambda_G \sum_{j=0}^{N-1} BK_j P_j.$$

Somit ist die Verlustwahrscheinlichkeit BK wegen Kollision

$$BK = \frac{\lambda_K}{\lambda_G} = \sum_{j=0}^{N-1} BK_j P_j.$$

Einsetzen von BK_j ergibt für den Kollisionsverlust

$$BK = \frac{z-1}{z} A_{ZG} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{P_j}{N-j}.$$

Wenn alle N Abnehmer belegt sind, gehen alle zur Bearbeitung anstehenden Zugriffsvorgänge und damit die zugehörigen Verbindungswünsche wegen Abnehmermangels zu Verlust. Die bedingte Verlustrate im Zustand N ist also

$$\lambda_{V/N} = \lambda_G.$$

Bei allen anderen Belegungszuständen treten keine Verluste wegen Abnehmermangels auf. Mit der mittleren Verlustrate

$$\lambda_V = \lambda_{V/N} P_N = \lambda_G P_N$$

ergibt sich somit die Verlustwahrscheinlichkeit BA wegen Abnehmermangels zu

$$BA = \lambda_V / \lambda_G = P_N.$$

„Kollisionen“ und „Abnehmermangel“ sind disjunkte Ereignisse. Der resultierende Gesamtverlust ergibt sich deshalb als Summe der einzelnen Verlustwahrscheinlichkeiten:

$$BG = BK + BA.$$

Es sei hier angemerkt, daß für die ungünstigste Zugriffsstrategie – nämlich Voreinstellung aller Zugriffspunkte auf den ersten freien Abnehmer des durchnummerierten Abnehmerbündels – bei Verwendung der Näherungsformeln für $A_{ZG} \ll 1$ –

$$BK_j = \frac{z-1}{z} \frac{A_{ZG}}{1}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

zu setzen wäre. Nach kurzer Umformung ergäbe sich für diese ungünstigste Zugriffsstrategie der größtmögliche Kollisionsverlust (für $A_{ZG} \ll 1$) zu

$$BK = \frac{z-1}{z} A_{ZG} (1 - BA).$$

Für große Zugriffspunktzahl z und kleine Planungs-Verlustwahrscheinlichkeit BA ergäbe sich damit (wie zu erwarten) als obere Grenze für den Kollisionsverlust

$$BK \leq A_{ZG}.$$

7.3. Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion P_j

Zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten BK , BA und BG ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion P_j (Wahrscheinlichkeit für genau j belegte Abnehmer) nötig. Diese kann näherungsweise folgendermaßen berechnet werden:

Bei jedem Belegungszustand $j = 0, 1, \dots, N-1$ ist der Kollisionsverlust BK_j nach Abschnitt 6 sehr klein gegen eins. Zugriffsvorgänge gehen also nur sehr selten wegen Kollision zu Verlust. Die mittlere Dauer T_N einer Nutzbelegung (Größenordnung 100 s bei Fernsprechen) ist sehr groß gegenüber der Zeitrasterperiode T_Z (Größenordnung ms). Die zeitliche Rasterung kann bei der Betrachtung der Nutzbelegungen daher vernachlässigt werden. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten wird deshalb der real existierende zeitgerasterte Zufallsvorgang (bei dem Häufungen von Zugriffsvorgängen und daher Kollisionen sich ergeben können) näherungsweise durch folgenden „Geburts- und Tod-Prozeß“ [5]–[7] ersetzt (Bild 4):

1. In jedem Belegungszustand $j = 0, 1, \dots, N$ ist die Ankunftsrate für Belegungswünsche konstant gleich λ_G (Poissonscher Forderungsstrom).
2. In den Belegungszuständen $j = 0, 1, \dots, N-1$ geht ein einfallender Belegungswunsch mit der bedingten Wahrscheinlichkeit BK_j wegen Kollision zu Verlust.
3. Im Belegungszustand N gehen alle einfallenden Belegungswünsche wegen Abnehmermangels zu Verlust.
4. In jedem Belegungszustand $j = 1, 2, \dots, N$ ist die Belegungsrate (da jede Belegungsdauer negativ exponentiell verteilt ist) proportional zur Anzahl der bestehenden Belegungen.

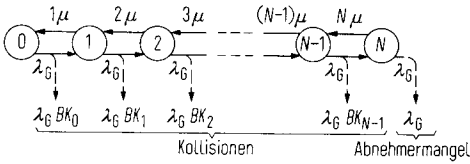


Bild 4. Zustandsdiagramm des ersatzweise eingeführten Geburts- und Tod-Prozesses; λ_G Rufeinfallrate durch alle Zugriffspunkte, μ Belegungsenderate je Belegung, BK_j Kollisionsverlust bei j belegten Abnehmern, N Abnehmeranzahl.

Im Bild 4 ist das Zustandsdiagramm mit den Übergangs- und Verlustraten dieses ersatzweise eingeführten Geburts- und Tod-Prozesses angegeben. Dessen Zustandswahrscheinlichkeiten können exakt berechnet werden. Die $(N+1)$ Wahrscheinlichkeiten P_j (mit $j=0, 1, \dots, N$) lassen sich aus den N „Gleichgewichtsbedingungen“

$$P_j \lambda_G (1 - BK_j) = P_{j+1} (j+1) \mu, \quad j=0, 1, \dots, N-1$$

und der „Normierungsbedingung“

$$\sum_{j=0}^N P_j = 1$$

als $(N+1)$ -ter Gleichung eindeutig bestimmen [5]. Dabei ist $\mu = 1/T_N$ die Belegungsende-Rate pro bestehender Nutzbelegung. Mit $A_{NG} = \lambda_G T_N$ als Gesamtangebot an Nutzbelegungen ergibt sich aus den obigen „Gleichgewichtsbedingungen“ die Rekursionsformel

$$P_{j+1} = \frac{A_{NG} (1 - BK_j)}{j+1} P_j, \quad j=0, 1, \dots, N-1.$$

Durchrechnen der Rekursionsformel ergibt als allgemeine Lösung

$$P_j = \frac{A_{NG}^j}{j!} P_0 \prod_{k=0}^{j-1} (1 - BK_k), \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Die darin noch unbekannte Wahrscheinlichkeit P_0 kann mit der Normierungsbedingung bestimmt werden. Somit ist die exakte Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten des Ersatzprozesses und der interessierenden Verlustwahrscheinlichkeiten möglich.

8. Numerische Berechnung

8.1. Numerische Näherung

Die numerische Berechnung der Zustands- und Verlustwahrscheinlichkeiten vereinfacht sich erheblich, wenn die nachfolgend beschriebene numerische Näherung angewendet wird:

In jedem der Belegungszustände $j=0, 1, \dots, N-1$ ist der Kollisionsverlust BK_j sehr klein gegen eins:

$$BK_j \ll 1, \quad j=0, 1, \dots, N-1.$$

Bei den verwendeten Zahlenwerten für das Gesamtangebot A_{NG} an Nutzbelegungen ist die Abnehmeranzahl N in einer Größenordnung, daß für das Produktglied in der Rekursionsformel näherungsweise (für beliebige j) der Wert eins eingesetzt werden kann:

$$\prod_{k=0}^{j-1} (1 - BK_k) \approx 1, \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Das Gleichungssystem zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten vereinfacht sich dann zu

$$P_j = \frac{A_{NG}^j}{j!} P_0, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad \sum_{j=0}^N P_j = 1.$$

Dies sind genau die Bestimmungsgleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten beim klassischen Erlangischen Verlustsystem mit N Abnehmern beim Angebot A_{NG} . Deren explizite Lösung ist

$$P_j = \frac{\frac{A_{NG}^j}{j!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A_{NG}^k}{k!}}, \quad j=0, 1, \dots, N.$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten P_j können somit (angenähert) ohne Berücksichtigung der Kollisionsverluste berechnet werden.

8.2. Numerische Auswertung

Im Bild 5 ist der Kollisionsverlust BK beim Vielfachzugriff auf freie Abnehmer in Abhängigkeit vom Gesamtangebot A_{NG} angegeben. Parameter ist die Anzahl z der Zugriffspunkte. Als Belegungsdauern wurden die Werte $T_N = 120$ s und $T_Z = 4$ ms verwendet. Die Abnehmeranzahl N wurde jeweils so

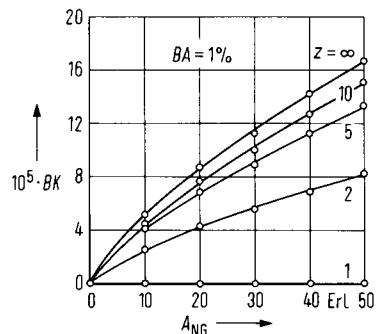


Bild 5. Kollisionsverlust BK beim Vielfachzugriff von z Zugriffspunkten auf gleichwahrscheinlich ausgewählte freie Abnehmer eines mit dem Gesamtangebot A_{NG} beaufschlagten Abnehmerbündels; Parameter: Planungsverlustwahrscheinlichkeit $BA = 1\%$, mittlere Nutzbelegungsdauer $T_N = 120$ s, Zeitraasterperiode $T_Z = 4$ ms.

bemessen, daß die Verlustwahrscheinlichkeit BA wegen Abnehmermangels den Planungswert $BA = 1\%$ gerade noch nicht überschreitet. Es zeigt sich, daß mit diesen Zahlenwerten der Kollisionsverlust BK beim Vielfachzugriff auf freie Abnehmer bei einem Gesamtangebot $A_{NG} \leq 50$ Erl mit $BK \leq 0,02\%$ extrem klein ist. In Fernsprechnetzen dieser Größenordnung kann daher der Kollisionsverlust BK gegenüber der Verlustwahrscheinlichkeit BA bei der Systemdimensionierung vernachlässigt werden.

Wenn die Abnehmeranzahl N nach einer höheren Planungs-Verlustwahrscheinlichkeit BA wegen Abnehmermangels bemessen wird, dann wird die mittlere Anzahl $(N - y)$ der freien Abnehmer absinken.

Dementsprechend wird der Kollisionsverlust zunehmen. Die entgegengesetzte Wirkung ist bei einer Bemessung der Abnehmeranzahl N nach einer kleineren Planungs-Verlustwahrscheinlichkeit BA zu erwarten. Dieser Zusammenhang ist (für $z = \infty$) im Bild 6 dargestellt.

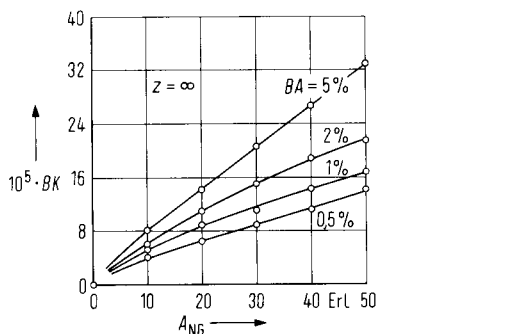


Bild 6. Kollisionsverlust BK beim Vielfachzugriff von unendlich vielen Zugriffspunkten auf gleichwahrscheinlich ausgewählte freie Abnehmer eines mit dem Gesamtangebot A_{NG} beaufschlagten Abnehmerbündels; Parameter: Planungsverlustwahrscheinlichkeit BA , mittlere Nutzbelegungsdauer $T_N = 120$ s, Zeitrasterperiode $T_Z = 4$ ms.

Bei Datenverkehr ist wegen der sehr viel kleineren mittleren Verbindungsdauer bei gleichem Gesamtangebot A_{NG} die Rufeinfallrate sehr viel höher als bei Fernspreverkehr. Der Kollisionsverlust kann dann die gleiche Größenordnung wie die Verlustwahrscheinlichkeit BA erreichen und ist dann bei der Systemdimensionierung zu berücksichtigen.

9. Schlußbemerkung

In TDMA-Durchschalte-Vermittlungsnetzen mit verteilter Steuerung können Kollisionen von Zugriffsvorgängen auftreten. Es wurde unterstellt, daß kollidierende Zugriffsvorgänge nicht weiterbehandelt werden und die zugehörigen Verbindungswünsche deshalb wegen Kollision zu Verlust gehen. Die zugehörige Verlustwahrscheinlichkeit (genannt Kollisionsverlust BK) wurde allgemein berechnet. Die numerische Auswertung ergab, daß für kleine Fernsprechnetze (mit $A_{NG} \leq 50$ Erl, $T_N = 120$ s, $T_Z = 4$ ms) der Kollisionsverlust BK klein gegenüber üblichen Planungswerten der Verlustwahrscheinlichkeit BA wegen Abnehmermangels und somit vernachlässigbar ist. Für Fernspreverkehr ergibt sich also selbst bei Abbruch kollidierender Verbindungswünsche (als ungünstigster Systemreaktion) kein Nachteil gegenüber zentralgesteuerten Systemen mit gleicher Abnehmeranzahl. Für andere Verkehrsarten kann berechnet werden, ob die Kollisionsverluste bei der Systemdimensionierung zu berücksichtigen sind. Zu beachten ist, daß in dieser Arbeit stets die Anwendung des Durchschalte-Vermittlungsprinzips unterstellt wurde. Ähnliche Probleme treten bei Paket-Vermittlungsnetzen mit verteilter

Steuerung auf, welche beispielsweise in lokalen Netzen (LANs, local area networks) zum Einsatz kommen, vgl. [8]. Hierzu sei auf [9] und die dort zitierten Literaturstellen verwiesen.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Marko, Technische Universität München, für die Förderung und Unterstützung dieser Arbeit.

(Eingegangen am 20. Januar 1983.)

Symbolverzeichnis

A_{NG}	Angebot an Nutzbelegungen insgesamt,
A_Z	Angebot an Zugriffsvorgängen je Zugriffspunkt,
A_{ZG}	Angebot an Zugriffsvorgängen insgesamt,
BA	Verlustwahrscheinlichkeit wegen Abnehmermangels,
BG	Verlustwahrscheinlichkeit insgesamt,
BK	Verlustwahrscheinlichkeit wegen Kollision,
I	Kollisionsanzahl,
N	Abnehmeranzahl,
P_j	Wahrscheinlichkeit für den Zustand j ,
P_Z	Zugriffswahrscheinlichkeit,
r	Anzahl freier Abnehmer,
T_N	mittlere Nutzbelegungsdauer,
T_Z	Zeitrasterperiode, Dauer eines Zugriffsvorgangs,
y_Z	Belastung durch Zugriffsvorgänge je Zugriffspunkt,
z	Zugriffspunktzahl,
λ	Rufeinfallrate je Zugriffspunkt,
λ_G	Rufeinfallrate insgesamt,
λ_K	mittlere Kollisionsrate,
$\lambda_{K/j}$	bedingte Kollisionsrate im Zustand j ,
λ_{max}	maximale Zugriffsrate,
λ_V	mittlere Verlustrate,
$\lambda_{V/j}$	bedingte Verlustrate im Zustand j ,
μ	Belegungsenergie je Nutzbelegung.

Schrifttum

- [1] Herold, W. E. und Ohnsorge, H., Optical-fiber system with distributed access. Proc. IEEE **68** [1980], 1309–1315.
- [2] Schenkel, K. D., Ein integriertes 300 Mbit/s-Zeitmultiplex-Nachrichtensystem mit dezentraler Vermittlung. Nachrichtentech. Z. **27** [1974], 283–291.
- [3] Nocker, R., A time division multiplex communication network featuring decentralized switching and reduced bandwidth. Siemens Forschungs- und Entwicklungsber. **6** [1977], 198–203.
- [4] Nocker, R., Zeitmultiplex-Durchschalte-Vermittlungsnetz mit Vielfachzugriff und leitungsgebundener Signalübertragung. Dissertation, Techn. Universität München, 1981.
- [5] Cooper, R. B., Introduction to queuing theory. Macmillan Co., New York 1972.
- [6] Herzog, U., Methoden zur Analyse des dynamischen Ablaufgeschehens in Datennetzen. NTG-Fachber. **55** [1976], 66–82.
- [7] Kampe, G. und Kühn, P., Graded delay systems with infinite or finite source traffic and exponential or constant holding time. AEÜ **32** [1978], 8–18.
- [8] Metcalfe, R. M. und Boggs, D. R., Ethernet: Distributed packet switching for local computer networks. Commun. ACM **19** [1976], 395–404.
- [9] Tobagi, F. A. und Hunt, V. B., Performance analysis of carrier sense multiple access with collision detection. Computer Networks **4** [1980], 245–259.